حمیدرضا امیری

اصول شمول و عدم شمول

فرض کنید A و B مجموعه‌های متناهی دلخواه باشند. در این صورت،

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

بــه عبارت دیگر، برای یافتن تعداد اعضای اجتماع دو مجموعۀ A و B، یعنی $n(A\cup B)$، $n(A)$ و $n(B)$ را با هم جمع می‌کنیم و سپس $n(A\cap B)$ را از آن کم می‌کنیم که شامل $n(A)$ و $n(B)$ و عدم شمولِ $n(A\cap B)$ می‌شود.
این نتیجه از این حقیقت حاصل می‌شود که ما وقتی $n(A)$ و $n(B)$ را جمع می‌کنیم، اعضای $(A\cap B)$ را دوبار شمارش می‌کنیم. این اصل برای هر تعداد مجموعه صادق است. ما این اصل را برای سه مجموعه بیان می‌کنیم.

قضیه: برای هر سه مجموعۀ متناهی A، B و C داریم:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$$
$$-n(A\cap C)-(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

یعنی $n(A)$، $n(B)$ و $n(C)$ را شــامل، $n(A\cap B)$، $n(A\cap C)$ و $n(B\cap C)$ را مســتثنا، و $n(A\cap B\cap C)$ را شــامل می‌کنیم.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Inclusion .... شامل شدن، شمول، قبول کردن
2. Exclusion .... طرد کردن، عدم شمول
3. Finite .... متناهی
4. Union .... اجتماع
5. Elements .... اعضا
6. Principle .... اصل
7. Subtract .... تفاضل، کم کردن
8. Exclude .... مستثنا کردن، محروم کردن
9. include .... دربرداشتن، شامل شدن

THE INCLUSION - EXCLUSION PRINCIPLE

Let A and B be any finite sets. Then

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$$

In other words, to find the number $n(A \cap B)$ of elements in the union $A \cup B$, we add $n(A)$ and $n(B)$ and then we subtract $n(A \cap B)$; the is, we "include" $n(A)$ and $n(B)$, and we "exclude" $n(A \cap B)$. This follows from the fact that, when we add $n(A)$ and $n(B)$, we have counted the elements of $A \cap B$ twice. This principle holds for any number of sets. We first state it for three sets.

Theorem: For and finite sets A, B, C we have

$$n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-$$
$$n(A \cap C)-(B \cap C)+n(A \cap B \cap C)$$

That is, we "include" $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$, we "exclude" $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$, $n(B \cap C)$, and we include $n(A \cap B \cap C)$.

ترجمه برای دانش‌اموزان

EXAMPLE 6.11

Find the number of mathematics students at a college taking at least one of the languages French, German, and Russian given the following data:

65 study French	20 study French and German
45 study German	25 study French and Russin
42 study Russian	15 study German and Russin
	8 study all three langauges

We want to find $n(F \cup G \cup R)$ where F, G, and R denote the sets of students studying French, Greman, and Russian, respectively.

By the inclusion-exclusion principle,

$$n(F \cup G \cup R)=n(F)+n(G)+n(R)-n(F \cap G)-$$
$$n(F \cap R)+n(G \cap R)+n(F \cap G \cap R)$$
$$=65+45+42-20-25-15+8=100$$

Thun 100 students study at least one of the langauges.

Now, suppose we have any finite numaber of finite sets, say, A_1, A_2, ..., A_m. Let s_k be the sum of the cardinalities

$$n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k})$$

of all possible k-tuple intersections of the given m sets. Then we have the following general inclusion-exclusion principle.

Theorem 6.7:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup Am)=s_1-s_2+s_3-\dots+(-1)^{m-1}s_m.$$